УДК 378.02:37.016:531.12/.13
DOI 10.23951/2307-6127-2021-1-85-91

ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (МОДУЛЬ «КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»)

Е. Н. Кириллова, О. Д. Азоркина

Томский государственный педагогический университет, Томск

Исследуется подход к формированию универсальных компетенций в курсе «Теоретическая физика. Модуль: Классическая механика» для студентов бакалавриата на примере раздела, связанного с нахождением закона движения тела. Акцент ставится на подходе к решению уравнений Гамильтона как системы дифференциальных уравнений первого порядка. Модуль «Классическая механика» является начальным этапом изучения теоретической физики. В этом разделе рассматриваются различные подходы к исследованию динамики механических систем, такие как Ньютоновская механика, Лагранжева механика и канонический формализм Гамильтона. Эти подходы являются эквивалентными, но формализм Гамильтона имеет ряд преимуществ.

Тематика работы актуальна для студентов педагогических вузов, чьи профессиональные задачи предполагают умение осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1), обобщать теоретический материал и применять его к конкретным задачам с конкретными методическими целями. Цель разработки – помочь студентам увидеть общее и различное в решении задач, рассматривая предложенные задачи с единой позиции. Методическая задача состоит в формировании компетенций группы УК-1 при решении предлагаемых заданий.

Ключевые слова: *физико-математические науки, теоретическая физика, классическая механика, системы дифференциальных уравнений, динамика физических систем, подготовка педагогов, универсальные компетенции.*

В настоящее время компетентностный подход является доминирующим в образовании, поскольку предполагает в первую очередь не самоценное усвоение знаний обучающимися, а возможность уже в процессе обучения использовать эти знания для решения актуальных задач. Важнейшей чертой современного образования является универсальность. Во всех модулях образовательной программы и в различных видах деятельности присутствуют универсальные компетенции. Формированию универсальных компетенций в образовании, установленных во ФГОС 3++, посвящено множество работ (к примеру, [1, 2]). В наших работах [3, 4] рассматриваются некоторые аспекты формирования универсальных и профессиональных компетенций в курсе классической механики для бакалавриата педагогических вузов на примере решения задач классической механики в формализме Ньютона и Лагранжа.

Программа по теоретической физике [5] для бакалавриата предполагает овладение в том числе компетенциями группы УК-1, относящимися к группе универсальных компетенций – «Системное и критическое мышление».

Изучение компетенций остается по-прежнему актуальным, поэтому в настоящей работе мы продолжаем рассматривать формирование компетенций при изучении модуля «Классическая механика» в курсе теоретической физики, однако, в отличие от [3, 4], при нахождении закона движения тела здесь применяется формализм Гамильтона.

Уравнения Гамильтона полностью эквивалентны уравнениям Лагранжа, однако по сравнению с уравнениями Лагранжа они имеют более симметричную форму, а также являются инвариантными по отношению к каноническим преобразованиям, следовательно, уравнения Гамильтона имеют ряд преимуществ перед уравнениями Лагранжа при исследовании различных общих вопросов механики [6–8].

В данной работе будем говорить об уравнениях Гамильтона как системе дифференциальных уравнений первого порядка (изучавшихся студентами в соответствующем курсе бакалавриата [9]).

Новизна подхода состоит в том, что он позволяет обучающимся увидеть связь различных дисциплин и одновременно дает возможность обобщить на новом уровне частные задачи избранного раздела. Умение связать имеющиеся математические навыки с физическим содержанием задач предполагает способность анализировать, осуществлять поиск, синтезировать информацию, необходимую для решения задачи, – то, что заложено в компетенции УК-1 (способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач), обязательной для реализации в курсе теоретической физики, модуль «Классическая механика».

Для успешной реализации методической задачи работы (формирование указанных компетенций) обучающиеся должны владеть таким теоретическим материалом, как канонический формализм Гамильтона, и иметь практические навыки решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка и систем дифференциальных уравнений (в том числе с начальными условиями – задача Коши, теоретический материал изложен, к примеру, в учебниках [10, 11]).

Дифференциальные уравнения – это язык, на котором формулируется огромное количество задач в физике (а также химии, геометрии, биологии, гуманитарных науках). Динамика процесса – вот что интересует исследователя в большинстве задач.

Мы решаем в выбранных для иллюстрации примерах основную задачу механики – находим зависимость координаты от времени. Будем рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих как уравнения Гамильтона при изучении динамики четырех простых физических систем. Обучающийся должен увидеть как различие, так и сходство предложенных задач, реализуя тем самым компетенции ИУК-1.1 и ИУК-1.3. В конечном итоге студент должен найти импульсы и координаты тела, но для начала он анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие (ИУК-1.1), а также осуществляет поиск информации для решения задачи по различным типам запросов (ИУК-1.2).

Предполагая, что известны начальные значения координат и импульсов, можно поставить задачу Коши: найти решение $(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s)^T$ системы

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \partial H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) / \partial p_i \\ \dot{p}_i = -\partial H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) / \partial q_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

где s – число степеней свободы, удовлетворяющее начальным условиям:

$$(q_1(t_0), q_2(t_0), \dots, q_s(t_0), p_1(t_0), p_2(t_0), \dots, p_s(t_0))^T = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_s^0, p_1^0, p_2^0, \dots, p_s^0)^T.$$

Для решения систем существуют методы исключения неизвестных и интегрируемых комбинаций. В предлагаемых задачах используется первый метод.

Обобщенная энергия определяется следующей формулой:

$$H_{\text{о.э.}} = \sum_{i=1}^{S} p_i \dot{q}_i - L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t).$$

Если в данной формуле мы выразим обобщенные скорости через импульсы с помощью формулы $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i, i = 1, 2, \dots, s$, то получим функцию Гамильтона.

Замечание: студенты часто не понимают разницы между обобщенной энергией и функцией Гамильтона. Вычисляются они по одной формуле, но имеют различную функциональную зависимость: от скоростей и координат (о.э.) или от импульсов и координат (ф.Г.).

Отталкиваясь от полученных знаний (ИУК-1.2), студент определяет, анализирует и синтезирует информацию, необходимую для решения задачи, формируя компетенцию ИУК-1.3.

Обучающимся предлагаются для разбора четыре задачи, в которых возможно полностью проинтегрировать системы уравнений Гамильтона:

1. Для начала рассмотрим одномерный гармонический осциллятор – систему, которая при выведении ее из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы $F = -kx$ (k – постоянный коэффициент), пропорциональной смещению x. Функция Лагранжа такой системы имеет вид $L = T - U = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$. Вычислив обобщенный импульс $p = \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$, находим обобщенную энергию и функцию Гамильтона гармонического осциллятора $H_{\text{о.э.}} = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2 \Rightarrow H \equiv H_{\text{ф.Г.}} = p^2/(2m) + kx^2/2$.

Отсюда легко получить уравнения Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial H / \partial p = p/m, \\ \dot{p} = -\partial H / \partial x = -kx. \end{cases}$$

Систему уравнений будем решать методом сведения к одному уравнению более высокого порядка. Дифференцируем обе части первого уравнения и подставляем в него $\dot{p}$ из второго уравнения системы

$\ddot{x} = \dot{p}/m = -kx/m \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$, здесь $\omega = \sqrt{k/m}$ – циклическая частота.

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого ищут в виде $x = C\exp(\kappa t)$ (подстановка Эйлера). Находим корни соответствующего характеристического уравнения $\kappa^2 + \omega^2 = 0$: $\kappa^2 = -\omega^2 \Rightarrow \kappa_{1,2} = \pm i\omega$. Значит, решение уравнения второго порядка имеет вид $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$.

Дифференцируя выражение для координаты, получаем импульс

$$\dot{x} = -C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t \Rightarrow p = -mC_1 \sin\omega t + mC_2 \cos\omega t.$$

Обе функции найдены, запишем общее решение системы: $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$; $p = -m C_1 \sin\omega t + m C_2 \cos\omega t$. Здесь C_1, C_2 – постоянные.

2. Интересно разобрать в связи с предыдущей задачей вроде бы отличную от нее задачу о плоском маятнике с массой m в однородном поле тяжести (рис. 1). Стержень маятника – невесомый и нерастяжимый, длина его l = const.

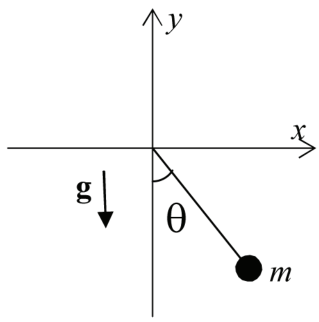

Рис. 1. Плоский маятник

В качестве обобщенной координаты выбирается угол отклонения θ маятника от вертикальной оси Oy (обобщенная скорость $\dot{q} = \dot{\theta}$). Функция Лагранжа данной системы рассматривалась в работе [3]:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 l^2 + mg\,l\cos\theta\,.$$

Обобщенный импульс есть $p = \partial L / \partial\dot{\theta} = m l^2\,\dot{\theta}$, соответственно, функция Гамильтона $H = p\,\dot{\theta} - L = p^2 / 2ml^2 - mg\,l\cos\theta$, тогда уравнения Гамильтона примут вид

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \partial H / \partial p = p / (ml^2), \\ \dot{p} = -\partial H / \partial\theta = -mgl\sin\theta. \end{cases}$$

Как и в предыдущей задаче, попробуем решить систему уравнений методом сведения к одному уравнению более высокого порядка. Дифференцируем первое уравнение и подставляем $\dot{p}$ из второго уравнения

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}}{ml^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta\,.$$

Это уравнение может быть решено в случае малых отклонений маятника, тогда sinθ ≈ θ и $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \omega = \sqrt{g / l}$. Мы получили такое же по форме уравнение, как для одномерного гармонического осциллятора (задача 1), а значит, сразу можем записать решение: $\theta = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$; $p = -m\, C_1 \sin\omega t + m\, C_2 \cos\omega t$, C_1, C_2 – постоянные.

Отсюда найдем декартовы координаты груза в приближении малых отклонений маятника:

$$x = l\cos(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t),\; y = l\sin(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t).$$

3. Рассмотрим задачу о двух грузах m_1 и m_2 на нерастяжимой нити, переброшенной через блок (рис. 2). Выбираем в качестве обобщенной координаты $y_1 = y$.

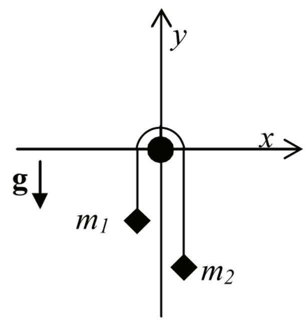

Рис. 2. Два груза, соединенные нитью, переброшенной через блок

Функция Лагранжа данной системы,

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{y}^2 + (m_1 - m_2)g\,y,$$

определяет импульс $p = \partial L / \partial\dot{y} = (m_1 + m_2)\dot{y}.$ Построим функцию Гамильтона: $H = p\dot{y} - L = p^2 / 2(m_1 + m_2) - (m_1 - m_2)g\,y.$ Уравнения Гамильтона примут вид:

$$\begin{cases} \dot{y} = \partial H / \partial p = p / (m_1 + m_2), \\ \dot{p} = -\partial H / \partial y = (m_1 - m_2)g = \text{const}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \int p / (m_1 + m_2)dt, \\ p = (m_1 - m_2)g\,t + p_0. \end{cases}$$

Мы можем последовательно решить оба уравнения. Интегрируя второе уравнение, получаем импульс и подставляем в первое уравнение. В итоге получаем обобщенную координату y и обе координаты грузов:

$$y = (m_1 - m_2)gt^2 / 2(m_1 + m_2) + p_0 t / (m_1 + m_2) + y_0 = y_1,\; y_2 = -(l + y_1).$$

4. Наконец, рассмотрим случай с тремя степенями свободы, когда появляется три пары уравнений Гамильтона. Лагранжиан свободной релятивистской частицы есть

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2 / c^2},\; v^2 = \sum_{i=1}^{3} v_i^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Вычисляем импульсы и выражаем квадрат скорости через импульсы:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \Rightarrow v^2 = \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + p^2}.$$

Обобщенная энергия примет вид:

$$H_{\text{о.э.}} = \sum_{i=1}^{3} p_i v_i - L = \sum_{i=1}^{3} \frac{m v_i^{\,2}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Выражая скорости через импульсы, получим функцию Гамильтона $H = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$.

Запишем систему уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{r}_i = \partial H / \partial p_i \\ \dot{p}_i = -\partial H / \partial r_i \end{cases}, i = 1, 2, 3 \Rightarrow \begin{cases} \dot{r}_i = c p_i / \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \\ \dot{p}_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{p} = \text{const} = \vec{p}_0 \Rightarrow$$

$$\vec{r} = c\vec{p}_0 \cdot t / \sqrt{p_0^{\,2} + m^2 c^2} + \vec{r}_0.$$

Данные три системы решаются, как и в предыдущем случае, последовательно: находим компоненты импульса из второго уравнения и подставляем в первое.

Анализируя полученные результаты решения, студенты приходят к выводу об идентичности дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, к которым сводятся уравнения Гамильтона для различных физических систем (примеры 1 и 2) – одномерного гармонического осциллятора и плоского маятника (в случае малых отклонений). Задачи о двух грузах на нити, переброшенной через блок, и о движении свободной релятивистской частицы также решаются аналогичным образом (хотя функциональная зависимость координат от времени в примерах 3 и 4 будет различаться). Реализуется компетенция ИУК-1.4: обучающийся при обработке информации применяет системный подход для решения поставленной задачи, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свою позицию. Таким образом, на разных этапах решения задач формируются различные компетенции группы УК-1: как правило, они тесно связаны между собой и по ходу работы формируются сразу две и более компетенции.

В работе рассмотрен подход к формированию универсальных компетенций группы УК-1 при изучении канонических уравнений Гамильтона для четырех систем. Важность темы заключается в том, что большинство задач по физике приводит к необходимости решения дифференциальных уравнений, поскольку многие физические законы являются дифференциальными уравнениями, относительно некоторых функций, описывающих эти процессы. Самый характерный пример систем обыкновенных дифференциальных уравнений в теоретической физике – именно уравнения Гамильтона. Построение математической модели системы при помощи анализа исходных данных задачи и выбор алгоритма решения, очевидно, формируют требуемые курсом «Теоретическая физика. Модуль: Квантовая механика» для бакалавриата универсальные компетенции УК-1.

Список литературы

1. Белкина В. В., Макеева Т. В. Концепт универсальных компетенций высшего образования // Ярославский пед. вестник. 2018. № 5. С. 117–126.
2. Тарханова И. Ю. Формирование универсальных компетенций обучающихся средствами университетской среды // Вестник Костромского гос. ун-та. 2018. Т. 24, № 3. С. 123–128.
3. Азоркина О. Д., Кириллова Е. Н. О формировании профессиональных компетенций будущих учителей физики на примере занятия по курсу «Теоретическая физика» // Научно-педагогическое обозрение (Pedagogical Review). 2019. Вып. 2 (24). С. 9–16. DOI: 10.23951/2307-6127-2019-2-9-16
4. Азоркина О. Д., Кириллова Е. Н. О формировании универсальных компетенций при решении задач теоретической физики в модуле «Классическая механика» // Научно-педагогическое обозрение (Pedagogical

Review). 2020. Вып. 2 (30). С. 121–129. DOI: 10.23951/2307-6127-2020-2-121-129

5. Рабочая программа учебной дисциплины Б1.О.08.03 «Теоретическая физика». Томск: ТГПУ, 2019. 9 с. URL: http://193.106.132.55/RPDPrint/print/1836543?reportId=72 (дата обращения: 01.10.2020).
6. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие: в 10 т. Т. 1. Механика. М.: Физматлит, 2017. 224 с.
7. Бороненко Т. С., Бухбиндер И. Л., Кругликов В. В. Задачи по классической механике: учебно-метод. пособие. Томск: ТГПУ, 2003. 160 с.
8. Кудрявцева Н. В. Практикум по классической механике: учебно-метод. пособие. Томск: ТГУ, 1986. 106 с.
9. Рабочий учебный план по программе бакалавриата. Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки). Направленность (профиль) «Математика и физика». Томск: ТГПУ, 2020. 28 с. URL: https://tspu.edu.ru/files/sveden2/opop/2020-2021/FMF440305_PO2prof_MatemFiz/401/UP/UP.pdf (дата обращения: 05.11.2020).
10. Эльсгольц Л. Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. для вузов. СПб.: Лань, 2002. 224 с.
11. Умнов А. Е., Умнов Е. А. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МФТИ, 2017. 304 с.

Кириллова Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный педагогический университет (ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061).
E-mail: elena@tspu.edu.ru

Азоркина Олеся Демидовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный педагогический университет (ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061).
E-mail: azorkina@tspu.edu.ru

Материал поступил в редакцию 17.05.2020

DOI 10.23951/2307-6127-2021-1-85-91

FORMATION OF UNIVERSAL COMPETENCIES IN SOLVING HAMILTON EQUATIONS IN THE COURSE OF THEORETICAL PHYSICS (MODULE “CLASSICAL MECHANICS”)

E. N. Kirillova, O. D. Azorkina

Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation

At present, the competence-based approach is dominant in education, since it presupposes, first of all, not the self-valuable assimilation of knowledge by students, but the opportunity to use this knowledge in the learning process to solve urgent problems. The most important feature of modern education is its universality. There are universal competences in all modules of the educational program and in various activities. This work is devoted to the formation of universal competencies in the course “Theoretical Physics. Module: Classical Mechanics” for undergraduate students on the example of a section related to finding the law of body motion. The emphasis is on the approach to solving Hamilton’s equations as a system of first-order differential equations.

The module “Classical Mechanics” is the initial stage of the study of theoretical physics. This section discusses various approaches to the study of the dynamics of mechanical systems, such as Newtonian mechanics, Lagrangian mechanics, and Hamilton’s canonical formalism. These approaches are equivalent, but Hamilton’s formalism has several advantages. The topic of the work is relevant for students of pedagogical universities, whose professional tasks involve the ability to search, critical analysis and synthesis of information, apply a systematic approach to solving the assigned tasks (Universal Competencies-1), generalize theoretical material and apply it to specific tasks with specific methodological goals. The purpose of the development is to help students see the similar and different points in problem solving, considering the proposed problems from a unified position. The methodological task is to form the competencies of the UC-1 group when solving the proposed tasks.

Keywords: *physical and mathematical sciences, theoretical physics, classical mechanics, systems of differential equations, dynamics of physical systems, teacher training, universal competencies.*

References

1. Belkina V. V., Makeyeva T. V. Kontsept universal'nykh kompetentsiy vysshego obrazovaniya [The concept of universal competences of higher education]. *Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik – Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 2018, no. 5, pp. 117–126 (in Russian).
2. Tarkhanova I. Yu. Formirovaniye universal'nykh kompetentsiy obuchayushchikhsya sredstvami universitetskoy sredy [Formation of universal competencies of students by means of the university environment]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta – Vestnik of Kostroma State University*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 123–128 (in Russian).
3. Azorkina O. D., Kirillova E. N. O formirovanii professional'nykh kompetentsiy budushchikh uchiteley fiziki na primere zanyatiya po kursu "Teoreticheskaya fizika" [On the formation of professional competencies of future physics teachers on the example of a lesson in the course "Theoretical Physics"]. *Nauchno-pedagogicheskoe obozrenie – Pedagogical Review,* 2019, vol. 2 (24), pp. 9–16 (in Russian). DOI: 10.23951/2307-6127-2019-2-9-16.
4. Azorkina O. D., Kirillova E. N. O formirovanii universal'nykh kompetentsiy pri reshenii zadach teoreticheskoy fiziki v module "Klassicheskaya mekhanika" [On the formation of universal competencies in solving problems of theoretical physics in the module "Classical Mechanics"]. *Nauchno-pedagogicheskoye obozreniye – Pedagogical Review*, 2020, vol. 2 (30), pp. 121–129 (in Russian). DOI: 10 .23951/2307-6127-2020-2-121-129.
5. *Rabochaya programma uchebnoy distsipliny B1.O.08.03 "Teoreticheskaya fizika"* [The work program of the academic discipline B1.O.08.03 "Theoretical Physics"]. Tomsk, TSPU Publ., 2019. 9 p. (in Russian). URL: http://193.106.132.55/RPDPrint/print/1836543?reportId=72 (accessed 1 October 2020).
6. Landau L. D., Livshits E. M. *Teoreticheskaya fizika: uchebnoye posobiye v 10 t. T. 1. Mekhanika* [Theoretical Physics: Textbook. Manual in 10 valumess. Vol. 1. Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2017. 224 p. (in Russian).
7. Boronenko T. S., Bukhbinder I. L., Kruglikov V. V. *Zadachi po klassicheskoy mekhanike: uchebno-metodicheskoye posobiye* [Problems in Classical Mechanics: teaching guide]. Tomsk, TSPU Publ., 2003. 160 p. (in Russian).
8. Kudryavtseva N. V. *Praktikum po klassicheskoy mekhanike: uchebno-metodicheskoye posobiye* [Practical work on classical mechanics: teaching guide]. Tomsk, TSU Publ., 1986. 106 p. (in Russian).
9. *Rabochiy uchebnyy plan po programme bakalavriata. Napravleniye podgotovki 44.03.05 "Pedagogicheskoye obrazovaniye" (s dvumya profilyami podgotovki). Napravlennosti (profili) "Matematika i Fizika"* [The working curriculum for the undergraduate program. Direction of training: March 44, 2005 Pedagogical education (with two training profiles). Orientation (profiles) "Mathematics and Physics"]. Tomsk, TSPU Publ., 2020. 28 p. (in Russian). URL: https://tspu.edu.ru/files/sveden2/opop/2020-2021/FMF440305_PO2prof_MatemFiz/401/UP/UP.pdf (accessed 5 November 2020).
10. El'sgol'ts L. E. *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya: uchebnik dlya vuzov* [Ordinary differential equations: a textbook for higher education schools]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2002. 224 p. (in Russian).
11. Umnov A. Ye., Umnov Ye. A. *Osnovy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Fundamentals of the theory of ordinary differential equations]. Moscow, MFTI Publ., 2017. 304 p. (in Russian).

Kirillova E. N. Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tomsk State Pedagogical University (ul. Kiyevskaya, 60, Tomsk, Russian Federation, 634061).
E-mail: elena@tspu.edu.ru

Azorkina O. D. Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tomsk State Pedagogical University (ul. Kiyevskaya, 60, Tomsk, Russian Federation, 634061).
E-mail: azorkina@tspu.edu.ru